TITLE:
Δu=f(p,u)の単調な差分近似公式について (数値解析の基礎理論研究会報告集)

AUTHOR(S):
中島, 勝也

CITATION:
中島, 勝也. Δu=f(p,u)の単調な差分近似公式について (数値解析の基礎理論研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1969, 72: 113-127

ISSUE DATE:
1969-05

URL:
http://hdl.handle.net/2433/107938

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
72巻 1969年 113-127

$\Delta u = f(P, u)$ の単調な差分近似公式について

早大理工 中島 勝也

§1. 序

この論文の目的は，Poisson 方程式に対して J.H. Bramble -B.E. Hubbard [1] が与えた単調型の差分近似公式の解が最大値定理をみたすことと，表題の非線形方程式にも適用できることを示すことにある。

かんたんのために点 $P=(x, y)$ は2次元の有界領域 R 内にあるものとし，R の境界 C はなめらかな曲線であるとする。

問題は' C 上で与えられた連続関数 $g(P)$ に対して

$$
(1) \qquad \begin{aligned} \Delta u(P) &= f(P, u) & P \in R \\ u(P) &= g(P) & P \in C \end{aligned}
$$

となるような $u = u(P) \in C^2(R) \cap C(\bar{R})$ を求めよ.'

ということであるが，解析解の存在に関しては，適当な滑らかさの条件のもとに証明されている。たとえば Bers [1]，Courant-Hilbert [1]，Pohožaev [1] を参照されたい。

数値解の収束性と誤差評価に関してはGreenspan [1]，Collatz [1] がわかりよい。そこで用いられる方法は最大値原理で，差分近似では係数行列の positivity である。しかし誤差の精度をあげようとすると，係数行列の positivity が失なわれる。しかし誤差評価に用いられる解の性質は実はこの positivity よりも　もっとゆるい条件で成り立つ。Bramble－Hubbard [1] は係数行列の Monotonicity を用いたが，本論文では，Monotonicity よりもさらに広範な性質が最大値原理に関係することが示される。まず，行列のこれらの性質を明らかにすることから始めよう。

§2. 行列解析からの準備.

定義 1. 行列 A が，ベクトル x において

(2)　　$Ax \geq 0$　　ならば　$x \geq 0$

となるとき　単調であるという。ここで不等式は各要素ごとに負でないものとする。

Lemma 1. 単調行列は正則である.

証明.　$Ax \geq 0$ ならば　$x \geq 0$　はまた

$Ax \leq 0$ ならば　$x \leq 0$　を意味し，併せて

$Ax = 0$ ならば　$x = 0$　となるから

A は正則である.　　　　(終)

Lemma 2. Aが単調であることと，Aが正則で
$A^{-1} \geq 0$ であることと同値である．

証明． A が単調なら $A^{-1}=(A_1, A_2, \cdots A_n)$ が存在し，

$A A_i = \varepsilon_i$ (=単位ベクトル) ≥ 0 $\quad \therefore A_i \geq 0 \quad i=1,2,\cdots n$

したがって $A^{-1} \geq 0$．

逆に $A^{-1} \geq 0$ ならば $Ax \geq 0$ のとき

$A^{-1}(Ax) = x \geq 0$ （終）

系． 単調行列の積は単調である．

Lemma 3. A，B とも単調行列であるとする．そのとき

(3) $\quad A \leq B$ ならば $A^{-1} \geq B^{-1}$ である．

証明． $A^{-1}=(a_1^-, a_2^-, \cdots a_n^-)$，$B^{-1}=(b_1^-, b_2^-, \cdots, b_n^-)$
とする．

$$A(a_i^- - b_i^-) = \varepsilon_i - A b_i^- = \varepsilon_i - (A-B+B) b_i^-$$
$$=(B-A) b_i^- \geq 0$$
$$\therefore \quad a_i^- \geq b_i^- \quad i=1,2,\cdots,n \qquad \therefore A^{-1} \geq B^{-1} \text{ (終)}$$

さてこの単調行列のもつ重大な意味をつぎにあげよう．

連立一次方程式

(4) $\qquad Ax = b$

の 二つの近似解 x_0，x_1 が 不等式

(5) $\qquad Ax_0 \leq b \leq Ax_1$

を満足するものとする．このとき Aが単調ならば

真の解 x は 関係式

(6) $x_0 \leq x \leq x_1$

を満足し，したがって x_1 のもつ誤差の評価式

(7) $0 \leq x_1 - x \leq x_1 - x_0$

を得る．

楕円型微分方程式の差分近似方程式の係数行列のもつ単調性つまり逆行列の非負なる性質は，Green 関数の非負性に対応している．

さて与えられた行列が単調であるかどうかを判定する，かんたんな見分け方はないものであろうか．それに関して，つぎにのべる正型行列（matrices of positive type）がある。

定義 2．つぎの条件をみたす行列 $A=(a_{ij}),\ i,j=1,2,\cdots,n$ を正型である（of positive type）という．

(8) (a) $a_{ij} \leq 0$ $i \neq j$ のとき，

(b) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq 0$ すべての i について．

(c) $J(A)$ を $\{1, 2, \cdots, n\}$ の部分集合とするとき

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ ある $i \in J(A)$ について．

(d) A の中で任意の i から，$J(A)$ のある j に達する道（connection）がある．

i から j への道というのは A の零でない要素の列

$a_{ik_1}\, a_{k_1k_2}\, a_{k_2k_3} \cdots a_{k_rj}$ をいう.

注. $J(A)=\{1,2,\cdots,n\}$ のときAをMinkowski行列という.

Lemma 4. 正型行列は単調である.

証明. $Ax \geq 0$, Aが正型であるとする. $x \geq 0$でないとすると, xの負の最小の要素 $x_k<0$ が存在して

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j \leq x_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \leq 0$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}=0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j=0$, $a_{kj} \leq 0\ (k \neq j)$ これはxの要素がすべてx_kに等しいことを意味し, $i \in J(A)$に対して Axのi要素が負となる. (終)

注. ある置換行列Pによって

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

となる行列を可約であるといい, そうでない行列を既約であるという. グラフ理論によれば, 任意のiからすべてのjに達するAの中の道があることが, Aが既約であることと同等で, 係数行列の既約性は格子点集合が連結であることからみちびかれる.

Lemma 5. Aは単調行列, $B=(b_{ij})$ は $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \geq 0$ をみたすものとする。そのとき $A^{-1}B$も同じ関係 $\sum_{j,k} a_{ij}^{(-1)} b_{jk} \geq 0$ をみたす. ただし $a_{ij}^{(-1)}$ はA^{-1}の ij要素とする.

証明. $\sum_k \sum_j (a^{-1})_{ij}\, b_{jk} = \sum_j (a^{-1})_{ij} \sum_k b_{jk} \geq 0$.

§3. 差分近似式の作り方

問題(1)を解くために，xy平面を幅hの，軸に平行な正方格子で蔽い，R_hをR内の格子点集合，C_hをCと格子線の交点の集合とする．$R_h = R_1 + S_1 + S_2$とし，S_2はその近隣4点のうち少なくとも一つがC_h上にある点の集合，S_1はその上下左右各2つ計8個の近隣のうち$C_h + S_2$の点があるような点の集合とする． Poisson方程式に対する差分近似方程式の作り方の要点は，Laplacian に対する公式誤差が，

R_1 で $O(h^k)$ のときには

$S_h = S_1 + S_2$ で $O(h^{k-2})$

とするので精度のバランスがとれることである。ここでOは同位の無限小を表わすLandauの記号である。

さて当面の問題(1)の解$u \in C^6(R)$と$f_u \geq 0$を仮定して，精度が$O(h^4)$の数値解を得る公式を導びこう。

(9) $$\Diamond_h u(x,y) = u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y)$$

とおき，

(10) $$\Delta_h u(P) = \frac{1}{12h^2}[16\Diamond_h - \Diamond_{2h}]u(P), \quad P \in R_1$$

とする．近似度は4である．

(11) $$|\Delta u - \Delta_h u| \leq \frac{2}{15} M_6 h^4, \qquad P \in R_1.$$

ここで $M_k = \sup_R |\partial^k u|$ とする。

つぎに S_h での近似公式を作る。そこでの精度 $O(h^2)$ でない。

(12)　$\Delta_h u(P) = \dfrac{1}{h^2} \Diamond_h u(P)$,　　$P \in S_1$

とする。そのとき

(13)　$|\Delta u - \Delta_h u| \leq \dfrac{1}{12} M_4 h^2$.

S_2 の点 $P=(x,y)$ に対し少なくとも一つ C_h 上の点が近隣4点のうちにある。たとえば $0<\alpha\leq 1$ に対し $(x-\alpha h, y)$ が C_h 上にあるとする。C の滑らかさから h が小さいときに $(x+h,y)$, $(x+2h,y)$ は R_h 内にあると考えてよい。y 軸方向に対しても同様に $0<\beta\leq 1$ に対し $(x, y-\beta h)\in C$ で (x,y), $(x,y+h)$, $(x,y+2h)$ は R_h の点とする。そのとき

(14)
$$\begin{aligned}\Delta_h u(x,y) = \frac{1}{h^2}\Big[& \frac{1-\alpha}{\alpha+2}u(x+2h,y) + \frac{2(2-\alpha)}{\alpha+1}u(x+h,y) \\ & -\Big(\frac{3-\alpha}{\alpha}+\frac{3-\beta}{\beta}\Big)u(x,y) + \frac{6}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}u(x-\alpha h,y) - \frac{1-\beta}{\beta+2}u(x,y+2h) \\ & + \frac{2(2-\beta)}{\beta+1}u(x,y+h) + \frac{6}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}u(x,y-\beta h)\Big], \quad P\in S_2\end{aligned}$$

とおく。すると

(15)　$|\Delta u - \Delta_h u| \leq M h^2$,　　　　$P \in S_2$

となる。M は定数である。この Δ_h の定義にもとずき、( ) の差分近似方程式は

$$
(16)\begin{cases}
\frac{1}{12h^2}[16\diamondsuit_h-\diamondsuit_{2h}]U(P)=f(P,U(P)) & P\in R_1,\\
\frac{1}{h^2}\diamondsuit_h U(P)=f(P,U(P)) & P\in S_1\\
\Delta_h U(P)=f(P,U(P)) & P\in S_2\\
U(P)=g(P) & P\in C_h
\end{cases}
$$

となる．このうち $P\in R_1+S_1$ に対する $U(P)$ の係数行列が単調であることが以下に証明される．また第3式は $P\in C_h$ に対する項をおとせば，$P\in S_2$ の係数が他項の係数に比し圧倒的に大きい．

さて(16)をわかりやすくするために書き直そう．$P=(x,y)$ とするとき，その4隣をN, E, W, Sとし北Nは $(x,y+h)$ とする．他も同様に考えまたNN $=(x,y+2h)$ などとする．すると $P\in R_1$ のときN, E, W, S, NN, EE, WW, SSの8点は R_1+S_1 にある．(16)の始めの2式は

$$
(17)\begin{cases}
U(P)-\frac{4}{15}[U(N)+U(E)+U(W)+U(S)] \\
\quad+\frac{1}{60}[U(NN)+U(EE)+U(WW)+U(SS)] \\
\quad=\frac{-1}{5}h^2f(P,U(P)) & P\in R_1,\\
U(P)-\frac{1}{4}[U(N)+U(E)+U(W)+U(S)] \\
\quad=\frac{-1}{4}h^2f(P,U(P)) & P\in S_1
\end{cases}
$$

となる．第2式のN, E, W, Sのうちには S_2 の点もある．

それらの点でのUの値は右辺に移項したものとして(17)を
$P\in R_1+S_1$ に対する $U(P)$ の値を未知数とする連立一次方程式とみて, その係数行列をAとおこう. すると

Lemma 6. 上記のAは単調である.

証明. $A=I-H_1-H_2$ とおく. ここで I は単位行列で H_1, H_2 は(17)のような表わし方をすれば, $P\in R_1$ のときは

(18)
$$
\begin{aligned}
&U(P)\\
&-\left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon\right)\left[U(N)+U(E)+U(W)+U(S)\right]\\
&-\left(\tfrac{1}{60}+\varepsilon\right)\left[U(N)+U(E)+U(W)+U(S)\right]\\
&+\tfrac{1}{60}\left[U(NN)+\cdots\quad\right]=-\tfrac{1}{5}h^2 f(P,U(P))
\end{aligned}
$$

において, 第2行が H_1 に第3, 4行が H_2 に対応する。

$P\in S_1$ のときには

(19)
$$
\begin{aligned}
&U(P)\\
&-\left(\tfrac{1}{4}-\bar{\varepsilon}\right)\left[U(N)+U(E)+U(W)+U(S)\right]\\
&-\bar{\varepsilon}\left[U(N)+U(E)+U(W)+U(S)\right]=-\tfrac{1}{4}h^2 f
\end{aligned}
$$

とおいて第2行が H_1 に第3行が H_2 に対応する.

ここで ε と $\bar{\varepsilon}$ とは $\frac{1}{4}$ 以下の正数で,

(20)
$$
\begin{aligned}
&\left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon\right)\left(\tfrac{1}{60}+\varepsilon\right)\geq\tfrac{1}{60}\\
&\left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon\right)\bar{\varepsilon}\geq\tfrac{1}{60}
\end{aligned}
$$

を満足するようにとる. これは

(21) $\frac{1}{12} \leqq \varepsilon \leqq \frac{3}{20}$, $\frac{1}{15-60\varepsilon} \leqq \bar{\varepsilon} < \frac{1}{4}$

と同値で, $\varepsilon = \frac{7}{60}$, $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{8}$ ととれる.

さて

(22) $A = I - H_1 - H_2 = (I - H_1)(I - (I - H_1)^{-1} H_2)$

において, $I - H_1$ は正型であることは明らかだから,

$I - (I - H_1)^{-1} H_2$ が単調ならば Lemma 2 により A が単調となる. A について知れることは, (8)(b)(c)(d)に当る

(23) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geqq 0$ (すべての i について)

(24) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ ($P \in S_1$ に対応する i の一部.)

であり, $J(A) \neq 0$. $i \to j \in J(A)$ なる H_1 内の道がある.

とくに $(I - H_1)^{-1} > 0$ であって, $H = (I - H_1)^{-1} H_2$ とおくと

$I - H = (I - H_1)^{-1} A$

は正型の条件のうち (8) (c) をすべての行についてみたし, (8)(a) さえ証明できれば Minkowski 行列であることが知られる. したがって H の対角要素以外は負でないことを示せばよい. $\rho(H_1) < 1$ より $(I - H_1)^{-1} = I + H_1 + H_1^2 + \cdots$

(25) $H = (I - H_1)^{-1} H_2 = H_2 + H_1 H_2 + H_1^2 H_2 + \cdots$

これを2項ずつ加えて H_2 の $-\frac{1}{60}$ の要素を $H_1 H_2$ の正の対応する要素 消すようにする. (20)によりそれが成立つようになっている (終)

さて 解ベクトル$U(P)$を $P\in R_1$, $P\in S_1$, $P\in S_2$, $P\in C_a$ に従がい，それらに対応する部分ベクトル U_1, U_2, U_3, U_4 に分けると，(16) は

$$
(26)\quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}F_1 h^2 \\ -\frac{1}{4}F_2 h^2 \\ -\gamma F_3 h^2 \\ G \end{pmatrix}
$$

となる．左辺の行列はその最大要素が1となるように，つまり(17)のような形に正規化してあるものとする．その次3ブロックまでは行の要素の和が0である． Lemma 6 で証明されたことにより

Corollary. (26)の行列のうち $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$ は単調である．

$$
(27)\quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = I
$$

とすると，逆行列 $B=(B_{ij})$; $i,j=1,2$ は

$$
(28)\quad B \geq 0, \quad \text{つまり} \quad b_{jk} = (B)_{jk} \geq 0
$$

である．さて

Lemma 7. $-B_{12}A_{23}$, $-B_{22}A_{23}$ は non-negative で，かつそのすべての行について，要素の和は1である．

証明． $B\geq 0$ と $A_{23}\leq 0$ から 前半は明らかである．

つぎに，(17)より明らかなように，行列 (A_{11}, A_{12}), (A_{21}, A_{22}, A_{23}) は，その要素の行和が 0 であるから

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sum_j (A_{23})_{ij} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$(29)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{k,j} (B_{12})_{ij} (A_{23})_{jk} \\ -\sum (B_{22})_{ij} (A_{23})_{jk} \end{pmatrix}$$

(終)

Lemma 8. (Mean property)

(26)において $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ の場合には，ベクトル U_1, U_2 の要素はベクトル U_3 の要素の荷重平均である．したがってそれらの要素の値は，U_3 の要素の最小値と最大値との間にある．

証明．(30) $U_1 = -B_{12} A_{23} U_3$, $U_2 = -B_{22} A_{23} U_3$ より明らか．(終)

Lemma 9. (Maximum principle)

(26)において $F_1 \geq 0$, $F_2 \geq 0$ の場合には，解 $(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3)$ の最大値は $\bar{U}_3$ の要素の中にある．もしその最大値が (U_1, U_2) の要素のどれか一つとでも等しければ，解は定数である．

証明．(31) $U_1 = -B_{12} A_{23} U_3 - \frac{4}{5} h^2 B_{11} F_1 - \frac{1}{4} h^2 B_{12} F_2 \leq -B_{12} A_{23} U_3$

(32) $U_2 = -B_{22} A_{23} U_3 - \frac{4}{5} h^2 B_{21} F_1 - \frac{1}{4} h^2 B_{22} F_2 \leq -B_{22} A_{23} U_3$

より明らか．(終)

Lemma 10. (26)の左辺の行列は正則である.

証明. (26)の右辺を0ベクトルとしたときの解が0ベクトルであることを示せばよい.

$$(33)\quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = 0$$

から $U_4 = 0$. したがって第3行より

$$(34)\quad A_{32}U_2 + A_{33}U_3 = (-A_{32}B_{22}A_{23} + A_{33})U_3 = 0$$

また Lemma 7 より

$$(35)\quad \sum_j (A_{32})_{ij} = \sum_{j,k} (A_{32})_{ik} (-B_{22}A_{23})_{kj}$$

他方(14)より A_{34} を除外したとき (A_{32}, A_{33}) は A_{33} の対角要素が優位になっているから $-A_{32}B_{22}A_{23} + A_{33}$ も対角優位であって正則となる. 故に $U_3 = 0$.

さらに Maximum principle によって $U_1 = U_2 = 0$. (終)

さて(14)式をよく検討すれば, 重要な結果を得る.

Theorem. 1. 差分近似方程式(16)を

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -A_{34}G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3}F_1 \\ \frac{1}{4}F_2 \\ \gamma F_3 \end{bmatrix} h^2$$

とかいたとき, 左辺の行列は単調である. また $f(P, U) = 0$ つまり右辺の第2のベクトルが零ベクトルのときには,

解ベクトル $U' = (U_1', U_2' U_3')$ はベクトル G の要素の荷重平均に等しい要素からなる。ゆえに解は与えられた境界条件 $g(P)$ の最大値と最小値との間の値をとる。

証明 (14) 式からの計算が長くなるが、根本的には Lemma 6 〜 Lemma 9 の証明と同様にできる。

Theorem. 2. 差分近似方程式 (16) の解は $\frac{\partial f}{\partial u} \geq 0$ のときに誤差 $u_h - u = O(h^4)$ である。

証明については著者の論文 [1] を参照されたい。

以上

参考文献

Bers, L. [1]: On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type. J. Res. Nat. Bur. Stand. 51, 229–236 (1953).

Bramble, J. H. - B. E. Hubbard [1]: New monotone type approximations for elliptic problems. Math. Comp., 18. 349–367 (1964).

Collatz, L. [1]: The Numerical Treatment of Differential Equations. Springer, Berlin, 1966.

Courant, R - D. Hilbert [1] Method of Mathematical Physic II. Interscience, New York, 1962.

Nakashima, K. [1]: Difference analogue for nonlinear elliptic partial differential equations with high order of accuracy. Memoirs of the School of Science & Engineering Waseda University No. 32, 77—86 (1968).

Pohožaev, S. I.: [1]: The Dirichlet problem for the equation $\Delta u = u^2$. Soviet Math., 1960, 1143–1146.

Greenspan, D. [1]: Introductory Numerical Analysis of Elliptic Boundary Value Problem. Harpar & Row. New York, 1966